**CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)**

**A.A. 2023/24 - Appello del 2024-09-17**

*La durata della prova è di* **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

## Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate.

1. Per ogni $\alpha > 0$, esiste un processo gaussiano reale centrato $(X_s^\alpha)_{s\geq 0}$ avente funzione di covarianza $\mathbb{E}[X_s X_t] = (\min\{s,t\})^\alpha$, per $s, t \geq 0$.
2. Se $M = (M_t)_{t\geq 0}$ è una martingala continua tale che $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty$ allora $M \in H^2$.
3. Se $(B_t^1)_{t\geq 0}$, $(B_t^2)_{t\geq 0}$ sono moti browniani reali indipendenti, allora il processo $M_t := \max\{B_t^1, B_t^2\}$, per $t \geq 0$, è una submartingala continua.
4. Se $(X_n)_{n=0}^\infty$ è un processo a tempi discreti, a valori in $\mathbb{R}^d$ e adattato a una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, allora il tempo aleatorio

$$\tau := \inf\{n \geq 0 \,:\, X_n = X_k \quad \text{per qualche } k < n\}$$

è un tempo d'arresto.

**Cenno di soluzione:**

1. Vera: considera $\int_0^\infty I_{[0,s]} I_{[0,t]} u^{\alpha-1} du$.
2. Falso, manca la condizione $M_0 \in L^2$.
3. Vero: la funzione $(x,y) \mapsto \max\{x,y\}$ è convessa (e a crescita lineare).
4. Vero: infatti $\{\tau > n\} = \cap_{k\neq h\leq n} \{X_k \neq X_h\} \in \mathcal{F}_n$

## Problema 2

Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dX_t^x = \sin(X_t^x)dt + \cos(X_t^x)dB_t & \text{per } t > 0, \\ X_0^x = x \end{cases}$$

dove $(B_t)_{t\geq 0}$ è un moto browniano reale e $x \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Dire se per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono le ipotesi di esistenza e unicità delle soluzioni viste nel corso.
2. Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha l'uguaglianza in legge $X_t^x + 2\pi k = X_t^{x+2\pi k}$ per ogni $t \geq 0$.
3. Determinare, se esistono, tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che il processo costante $Y_t = x$ per ogni $t \geq 0$ sia soluzione dell'equazione.

4. Posto $x = 0$, calcolare $\mathbb{E}[X_t^x]$ per ogni $t \geq 0$.

**Cenno di soluzione:**

1. Valgono: i coefficienti sono Lipschitz e limitati.
2. Posta $Y_t := X_t^x + 2\pi k$ abbiamo che $Y_0 = x + 2\pi k$, mentre

$$dY_t = \sin(X_t^x)dt + \cos(X_t^x)dB_t = \sin(Y_t)dt + \cos(Y_t)dB_t$$

per periodicità delle funzioni trigonometriche. Per l'unicità (in legge) segue che $Y_t = X_t$ in legge.

3. Tali $x$ non esistono: infatti dovrebbe valere $\mathbb{E}[\langle X^x, X^x\rangle_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \cos(X_s^x)^2 ds\right] = 0$ per ogni $t \geq 0$, quindi dividendo per $t \to 0$ si trova $\cos(x)^2 = 0$. D'altra parte dovrebbe pure essere $\mathbb{E}[X_t^x] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \sin(X_s^x) ds\right]$ costante in $t$, quindi derivando per $t \to 0$ si trova pure $\sin(x) = 0$.
4. Posta $Y_t = -X_t^0$, abbiamo che $Y_0 = 0$, e

$$dY_t = -dX_t^0 = -\sin(X_t^0)dt - \cos(X_t^0)dB_t = \sin(Y_t)dt + \cos(Y_t)d(-B)_t.$$

poiché $-B$ è pure un moto browniano reale, ne segue che $Y$ risolve la stessa equazione di $X^0$ (rispetto ad un altro moto browniano) e quindi per l'unicità (in legge) si ha $-X_t^0 = Y_t = X_t^0$ in legge per ogni $t \geq 0$, ossia la distribuzione di $X_t^0$ è pari. Pertanto il valore atteso è nullo: $\mathbb{E}\left[X_t^0\right] = 0$.